This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ABR4569
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 06026674//r
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B53298
035/2: : |a (CaOTULAS)160125897
040: : |c MiU
050/1:0 : |a QA863 |b .W7
100:1 : |a Willing, Georg, |d 1877-
245:00: |a Beiträge zur Theorie der Bewegung der Kugel, welche auf einer ebene rollt, ohne zu gleiten...Meiningen, Druck der Keyssner'schen hofbuchdruckerei (K. Keyssner) 1904.
300/1: : |a 34 p. |c 22 cm.
500/1: : |a Inaug.-diss.--Leipzig.
500/2: : |a Vita.
650/1: 0: |a Dynamics, Rigid
998: : |c JMH |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Hosted by Google

Beiträge

zur

Theorie der Bewegung der Kugel,

welche auf einer Ebene rollt, ohne zu gleiten.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

an der

Universität Leipzig

vorgelegt von

Georg Willing

aus Saalfeld im Herzogtum Meiningen.

Meiningen.
Druck der Keyssner'schen Hofbuchdruckerei (Karl Keyssner).
1904.

Hosted by Google

Angenommen von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion auf Grund der Gutachten der Herren Hölder und Des Coudres.

Leipzig, den 16. November 1903.

Der Procancellar.

Hölder.

Hosted by Google

Meinen Eltern.

Hosted by Google

Hosted by Google

I.

In seiner Arbeit: Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis, hat Herr Prof. Dr. Hölder die Differenzialgleichungen für die Trägheitsbewegung der Kugel aufgestellt, welche auf einer festen Ebene ohne Gleitung rollt. Dabei ist von der Massenverteilung nicht das geringste vorausgesetzt; die Differenzialgleichungen charakterisieren die rein rollende Bewegung einer beliebig inhomogenen Kugel, deren Schwerpunkt irgendwo in ihrem Innern liegt.

Die Integration der Differenzialgleichungen liefert nur selten einfache Resultate. Schon bei der vereinfachenden Annahme, dass Mittelpunkt und Schwerpunkt identisch sind, treten rechnerische Schwierigkeiten auf. Diesen Fall behandelt Herr Eugen Stübler in seiner Dissertation: Bewegung einer auf horizontaler Ebene rollenden Kugel, deren Schwerpunkt im Mittelpunkt liegt. Insbesondere diskutiert er die Bewegung bei zwei gleichen Trägheitsmomenten. (Tübinger Dissertation, erschienen Stuttgart 1902.)

In der vorliegenden Arbeit soll angenommen werden, dass der Schwerpunkt nicht mit dem Mittelpunkt zusammenfällt. Da nun eine allgemeine Betrachtung sich ausserordentlich compliziert, haben wir von verschiedenen möglichen Arten der Bewegung zunächst solche herausgegriffen, welche eine einfachere analytische Behandlung zulassen.

Zur Orientierung hinsichtlich der Bezeichnungsweise und der benutzten Formeln mögen folgende Ausführungen dienen.

$\xi\eta\zeta$ sind die Axen eines im Raume festen rechtwinkligen Coordinatensystems. Auf der $\xi\eta$ Ebene, die wir uns etwa horizontal denken können, rollt unsere Kugel. Ihr Mittelpunkt ist Ursprung eines dem alten congruenten und mit der Kugel beweglichen

Hosted by Google

Systems, dessen Axen xyz gebildet werden von den Hauptträgheitsaxen für den Mittelpunkt. Die Coordinaten ein und desselben Raumpunktes lassen sich alsdann in doppelter Weise ausdrücken; es bestehen die Gleichungen:

$$1)\quad \begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z & x &= \alpha_1(\xi-\alpha) + \beta_1(\eta-\beta) + \gamma_1(\zeta-\gamma) \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z & y &= \alpha_2(\xi-\alpha) + \beta_2(\eta-\beta) + \gamma_2(\zeta-\gamma) \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z & z &= \alpha_3(\xi-\alpha) + \beta_3(\eta-\beta) + \gamma_3(\zeta-\gamma). \end{aligned}$$

In ihnen bedeuten $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ die Richtungscosini der x Axe in Bezug auf das feste System, $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ die der y Axe, u. s. w. $\alpha\,\beta\,\gamma$ sind die Coordinaten des Mittelpunktes; γ ist constant, und gleich dem Radius a der Kugel.

Für das Kugelteilchen im Moment der Berührung muss, falls reines Rollen stattfinden soll,

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0$$

sein. Der Charakter dieser Bedingungen tritt klar hervor, wenn wir die Euler'schen Winkel einführen. Sie sind definiert durch den Gleichungskomplex (cf. Novi Commentarii Acad. Petrop., Tom. XV, 1770, pag. 75 ff):

$$2)\quad \begin{aligned} \alpha_1 &= -\cos\varphi\cos f\cos\vartheta - \sin\varphi\sin f \\ \beta_1 &= -\sin\varphi\cos f\cos\vartheta + \cos\varphi\sin f \\ \gamma_1 &= \cos f\sin\vartheta \\ \alpha_2 &= -\cos\varphi\sin f\cos\vartheta + \sin\varphi\cos f \\ \beta_2 &= -\sin\varphi\sin f\cos\vartheta - \cos\varphi\cos f \\ \gamma_2 &= \sin f\sin\vartheta \\ \alpha_3 &= \cos\varphi\sin\vartheta \\ \beta_3 &= \sin\varphi\sin\vartheta \\ \gamma_3 &= \cos\vartheta. \end{aligned}$$

ϑ ist der Winkel, den die + z Axe mit der + ζ Axe bildet. Ferner bedeutet φ den Winkel, welchen die Horizontalprojection der + z Axe einschliesst mit der + ξ Axe, wobei die Bewegung von der letzteren nach der + η Axe als die positive angesehen wird. Dem Winkel f endlich kommt im beweglichen System dieselbe Bedeutung zu wie φ im festen. Mittelst (1) und (2) lassen sich, wie Herr Prof. Hölder zeigt, die Bedingungen umschreiben in folgende:

$$3)\quad \begin{aligned} d\alpha &= -a\sin\varphi\sin\vartheta\,df + a\cos\varphi\,d\vartheta \\ d\beta &= a\cos\varphi\sin\vartheta\,df + a\sin\varphi\,d\vartheta \\ d\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Sie sind, abgesehen von der letzten, nicht integrabel. Unsere

Hosted by Google

Kugel, welche rollen aber nicht gleiten kann, stellt demnach, um mit Heinrich Hertz zu reden, ein nichtholonomes materielles System vor.

Der momentane Bewegungszustand der Kugel wird als combiniert angesehen aus einer Drehung um eine durch den Mittelpunkt gehende Axe, und einer Verschiebung. p q r sind die Componenten der Dreh-, u v w die der Translationsgeschwindigkeit, beides nach den Axen des beweglichen Systems. Zwischen den Richtungscosinis und den Drehcomponenten bestehen ganz allgemein die Relationen (cf. etwa Kirchhoff, Mechanik, 1883, pag. 50):

$$4)\quad \begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \alpha_2 r - \alpha_3 q & \frac{d\alpha_2}{dt} &= \alpha_3 p - \alpha_1 r & \frac{d\alpha_3}{dt} &= \alpha_1 q - \alpha_2 p \\ \frac{d\beta_1}{dt} &= \beta_2 r - \beta_3 q & \frac{d\beta_2}{dt} &= \beta_3 p - \beta_1 r & \frac{d\beta_3}{dt} &= \beta_1 q - \beta_2 p \\ \frac{d\gamma_1}{dt} &= \gamma_2 r - \gamma_3 q & \frac{d\gamma_2}{dt} &= \gamma_3 p - \gamma_1 r & \frac{d\gamma_3}{dt} &= \gamma_1 q - \gamma_2 p. \end{aligned}$$

Die Bedingungen für das Rollen können nach Hölder auch in der Form genommen werden:

$$5)\quad \begin{aligned} u &= a(\gamma_3 q - \gamma_2 r) \\ v &= a(\gamma_1 r - \gamma_3 p) \\ w &= a(\gamma_2 p - \gamma_1 q). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen repräsentieren den Zusammenhang, der zwischen Drehung und Verschiebung besteht.

Die Hölder'schen Differenzialgleichungen selbst (Göttinger Nachrichten 1896, math. phys. Klasse, pag. 155) lauten:

$$6)\quad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} - a\gamma_3 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} + a\gamma_2 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial q} + q\frac{\partial T}{\partial r} \\ &\qquad - a(\gamma_3 r + \gamma_2 q)\frac{\partial T}{\partial u} + a\gamma_1\left(q\frac{\partial T}{\partial v} + r\frac{\partial T}{\partial w}\right) = o \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} - a\gamma_1 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} + a\gamma_3 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial r} + r\frac{\partial T}{\partial p} \\ &\qquad - a(\gamma_1 p + \gamma_3 r)\frac{\partial T}{\partial v} + a\gamma_2\left(r\frac{\partial T}{\partial w} + p\frac{\partial T}{\partial u}\right) = o \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} - a\gamma_2 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} + a\gamma_1 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial p} + p\frac{\partial T}{\partial q} \\ &\qquad - a(\gamma_2 q + \gamma_1 p)\frac{\partial T}{dw} + a\gamma_3\left(p\frac{\partial T}{\partial u} + q\frac{\partial T}{\partial v}\right) = o. \end{aligned}$$

Unter T ist die lebendige Kraft der Kugel verstanden; sie bleibt im Verlauf der Bewegung constant.

Hosted by Google

II.

In (6) stehen noch implicite die Verschiebungscomponenten u v w, die wir zu eliminieren haben. Die Trägheitsmomente für die Hauptaxen des Mittelpunktes wollen wir P Q R nennen. Bezeichnet man noch die Coordinaten des Schwerpunktes, bezogen auf x y z, mit $\lambda\,\mu\,\nu$, und die Gesamtmasse der Kugel mit M, so hat man für die lebendige Kraft folgenden Ausdruck zu nehmen:

$$2\,T = (u^2 + v^2 + w^2)\,M + P\,p^2 + Q\,q^2 + R\,r^2 + 2\,M\,[\lambda\,(v\,r - w\,q) + \mu\,(w\,p - u\,r) + \nu\,(u\,q - v\,p)].$$

Die Deviationsmomente sind wegzulassen, da wir ja auf die Hauptaxen beziehen. Bildet man nun die 6 partiellen Ableitungen von T, und berücksichtigt die Bedingungen (5) sowie die Formeln (4), so kann man die Hölder'schen Differenzialgleichungen umformen in andere, ebenso allgemeine, welche nur noch $p\,q\,r\,\frac{dp}{dt}\,\frac{dq}{dt}\,\frac{dr}{dt}, \gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$ enthalten. Gehörig geordnet, lauten sie:

$$[P + 2\,a\,M\,(\nu\,\gamma_3 + \mu\,\gamma_2) + a^2\,M\,(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)]\,\frac{dp}{dt} -$$

$$a\,M\,[\lambda\,\gamma_2 + (\mu + a\,\gamma_2)\,\gamma_1]\,\frac{dq}{dt} - a\,M\,[\lambda\,\gamma_3 + (\nu + a\,\gamma_3)\,\gamma_1]\,\frac{dr}{dt}$$

$$= [Q - R + a\,M\,(\nu\,\gamma_3 - \mu\,\gamma_2)]\,q\,r + a\,\lambda\,M\,p\,(\gamma_3\,q - \gamma_2\,r) + a\,\nu\,M\,\gamma_2\,(p^2 + q^2) - a\,\mu\,M\,\gamma_3\,(r^2 + p^2)$$

$$[Q + 2\,a\,M\,(\lambda\,\gamma_1 + \nu\,\gamma_3) + a^2\,M\,(\gamma_3^2 + \gamma_1^2)]\,\frac{dq}{dt} -$$

$$a\,M\,[\mu\,\gamma_3 + (\nu + a\,\gamma_3)\,\gamma_2]\,\frac{dr}{dt} - a\,M\,[\mu\,\gamma_1 + (\lambda + a\,\gamma_1)\,\gamma_2]\,\frac{dp}{dt}$$

$$= [R - P + a\,M\,(\lambda\,\gamma_1 - \nu\,\gamma_3)]\,r\,p + a\,\mu\,M\,q\,(\gamma_1\,r - \gamma_3\,p) + a\,\lambda\,M\,\gamma_3\,(q^2 + r^2) - a\,\nu\,M\,\gamma_1\,(p^2 + q^2)$$

$$[R + 2\,a\,M\,(\mu\,\gamma_2 + \lambda\,\gamma_1) + a^2\,M\,(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)]\,\frac{dr}{dt} -$$

$$a\,M\,[\nu\,\gamma_1 + (\lambda + a\,\gamma_1)\,\gamma_3]\,\frac{dp}{dt} - a\,M\,[\nu\,\gamma_2 + (\mu + a\,\gamma_2)\,\gamma_3]\,\frac{dq}{dt}$$

$$= [P - Q + a\,M\,(\mu\,\gamma_2 - \lambda\,\gamma_1)]\,p\,q + a\,\nu\,M\,r\,(\gamma_2\,p - \gamma_1\,q) + a\,\mu\,M\,\gamma_1\,(r^2 + p^2) - a\,\lambda\,M\,\gamma_2\,(q^2 + r^2).$$

Wie nicht anders zu erwarten war, sind sie durchweg cyklisch aufgebaut.

An diese allgemeinsten Differenzialgleichungen werden wir jedoch nicht anknüpfen, sondern uns mit einer naheliegenden

Hosted by Google

Specialisierung begnügen. Wir wollen nämlich annehmen, dass eine der Hauptaxen des Schwerpunktes gerade durch den Mittelpunkt geht. Sie fällt dann zusammen mit einer Hauptaxe des letzteren, etwa der z Axe. Die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkt sei l. Bei dieser Annahme ist

$$\lambda = \mu = 0, \quad \nu = l,$$

und infolgedessen

7) $$2T = (u^2 + v^2 + w^2)M + P p^2 + Q q^2 + R r^2 + 2 M l (u q - v p).$$

l soll, wir wollen dies gleich hier bemerken, immer positiv genommen werden.

Da jetzt nur eine der Schwerpunktscoordinaten von Null verschieden ist, wird die cyklische Symmetrie, welche die allgemeinen Differenzialgleichungen auszeichnet, bei den neuen verloren gehen. Letztere selbst heissen wie folgt:

8)
$$[P + 2 a l M \gamma_3 + a^2 M (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)] \frac{dp}{dt} - a^2 M \gamma_1 \gamma_2 \frac{dq}{dt} - a M \gamma_1 (l + a \gamma_3) \frac{dr}{dt} = (Q - R + a l M \gamma_3) q r + a l M \gamma_2 (p^2 + q^2)$$

$$[Q + 2 a l M \gamma_3 + a^2 M (\gamma_3^2 + \gamma_1^2)] \frac{dq}{dt} - a^2 M \gamma_1 \gamma_2 \frac{dp}{dt} - a M \gamma_2 (l + a \gamma_3) \frac{dr}{dt} = (R - P - a l M \gamma_3) r p - a l M \gamma_1 (p^2 + q^2)$$

$$[R + a^2 M (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)] \frac{dr}{dt} - a M (l + a \gamma_3) \left(\gamma_1 \frac{dp}{dt} + \gamma_2 \frac{dq}{dt}\right) = (P - Q) p q + a l M r (\gamma_2 p - \gamma_1 q).$$

Die linken Seiten lassen sich noch etwas einfacher schreiben. Denkt man sich nämlich die jeweilige Drehgeschwindigkeit projiciert auf eine Axe, welche durch den Mittelpunkt geht und parallel läuft zur ζ Axe, so wird diese Projection dargestellt werden durch den Ausdruck

$$\varrho = \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r,$$

so dass dann auch gilt:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \gamma_1 \frac{dp}{dt} + \gamma_2 \frac{dq}{dt} + \gamma_3 \frac{dr}{dt}.$$

Die linken Seiten von (8) lauten demzufolge:

8a)
$$(P + a^2 M + 2 a l M \gamma_3) \frac{dp}{dt} - a^2 M \gamma_1 \frac{d\varrho}{dt} - a l M \gamma_1 \frac{dr}{dt}$$

$$(Q + a^2 M + 2 a l M \gamma_3) \frac{dq}{dt} - a^2 M \gamma_2 \frac{d\varrho}{dt} - a l M \gamma_2 \frac{dr}{dt}$$

$$(R + a^2 M + a l M \gamma_3) \frac{dr}{dt} - a^2 M \gamma_3 \frac{d\varrho}{dt} - a l M \frac{d\varrho}{dt}.$$

Hosted by Google

III.

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie die Bewegung der Kugel verläuft, wenn zwei der Drehcomponenten gleichzeitig verschwinden. —

Soll die Drehung sich beschränken auf eine reine Rotation um die z Axe, so muss fortdauernd

$$p = q = o$$

sein. Aus der letzten der Gleichungen (8) ergibt sich sodann, dass $\frac{dr}{dt}$ verschwinden muss, d. h. entspricht der Anfangszustand der Bewegung einer Drehung um diejenige Hauptaxe, auf welcher der Schwerpunkt liegt, so wird die Kugel fortdauernd mit gleichförmiger Geschwindigkeit um sie rotieren. Ferner folgt aus (4), dass $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ constant bleiben, und dass $\frac{df}{dt} = -r$, was nach dem vorhergehenden ja selbstverständlich ist. Die Drehaxe behält ihre Richtung im Raume bei. Sie bewegt sich in einer Ebene fort, wie uns die Formel (cf. etwa Kirchhoff, pag. 66)

$$9) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\gamma_1 p + \gamma_2 q}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$$

zeigt. Ebenso einfach wie die Rotation ist auch die Translation: Mittelpunkt und Schwerpunkt bewegen sich gradlinig fort, und zwar mit der constanten Geschwindigkeit

$$a\, r \sin \vartheta,$$

wie man aus (5) und (2) leicht findet.

r und ϑ sind ganz beliebig. Hält man r fest und lässt ϑ variieren, so sieht man, ist die Geschwindigkeit der Verschiebung um so grösser, je mehr die z Axe der $\xi\eta$ Ebene parallel läuft. Ihr grösster Wert ist a r. Interessant ist auch der andere extreme Fall $\vartheta = 0^0$ oder $= 180^0$. Die Drehaxe ist alsdann im Raume völlig fest. —

Wenn die Bewegung bestehen soll in einer Rotation um die x Axe und einer Translation, so reducieren sich die Differenzialgleichungen (8) auf folgende:

Hosted by Google

$$[P + 2\,a\,l\,M\,\gamma_3 + a^2\,M\,(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)]\,\frac{dp}{dt} = a\,l\,M\,\gamma_2\,p^2$$

10)
$$a\,\gamma_1\,\gamma_2\,\frac{dp}{dt} = l\,\gamma_1\,p^2$$

$$\gamma_1\,(l + a\,\gamma_3)\,\frac{dp}{dt} = o.$$

Neben ihnen müssen aber auch die allgemeinen Relationen (4) erfüllt sein. Aus diesen erkennt man, dass $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ im Verlauf der Bewegung constant bleiben; die Drehaxe ändert ihre anfängliche Richtung nicht. Die letzte der Gleichungen (10) sagt nun aus, dass entweder $\frac{dp}{dt}$ oder $l + a\,\gamma_3$ oder aber γ_1 fortdauernd gleich Null sein muss. Nur die Annahme

$$\gamma_1 = o,\ \text{d. i.}\ \cos f = o$$

involviert keine Trivialität und keinen Widerspruch. Denn nimmt man etwa $\frac{dp}{dt} = o$ an, so ergibt sich aus (10) und (4), dass dann auch $p = o$ sein muss. Es entspricht diese Annahme dem Zustand völliger Ruhe. Wäre $l + a\,\gamma_3 = o$, so würde wieder dasselbe eintreten. Denn aus $\frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1\,q - \gamma_2\,p$ erhellt, dass entweder $p = o$ oder $\gamma_2 = o$ gesetzt werden muss. Das letztere, was allein noch denkbar wäre, führt jedoch auf einen Widerspruch, denn aus $\frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3\,p - \gamma_1\,r$ würde man $\gamma_3 = o$ folgern. Die Drehaxe muss also, wenn die verlangte Bewegung überhaupt möglich sein soll, parallel sein zur $\xi\,\eta$ Ebene.

Zuvor noch einige Worte über die Bewegung von Mittelpunkt und Schwerpunkt. Ersterer bewegt sich gradlinig fort, wie aus (9) und (3) ersichtlich, letzterer beschreibt eine verkürzte Cykloide. Die Geschwindigkeit des Mittelpunktes ist nach (5) und dem gefundenen $= a\,p$.

Unser Bestreben muss nun darauf gehen, p und den dritten Euler'schen Winkel in Funktionen der Zeit auszudrücken, um die erste der Gleichungen (10) zu befriedigen — die beiden übrigen kommen wegen $\gamma_1 = o$ nicht mehr in Betracht. Es genügt, ϑ zu ermitteln, denn aus (4) erhellt, dass

11)
$$p = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Hosted by Google

Um ϑ zu finden, gehen wir, es dürfte dies wohl der einfachste Weg sein, aus von (7). Die Formel nimmt für den Fall, den wir betrachten, die Gestalt an:

$$2\,T = (P + a^2\,M + 2\,a\,l\,M\cos\vartheta)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2.$$

Diese Differenzialgleichung lässt sich unmittelbar durch Quadratur lösen. Wir schreiben:

12) $$d\vartheta\sqrt{P + a^2\,M + 2\,a\,l\,M\cos\vartheta} = dt\sqrt{2\,T}.$$

Bei der Integration wird man auf elliptische Integrale stossen. Wir wollen zeigen, dass diese nur in einem ganz besonderen Falle ausarten und zu einer trigonometrischen Lösung führen können. Es muss nämlich dann $P + a^2\,M = 2\,a\,l\,M$ werden. Bezeichnet nun $\mathfrak{P}$ das Trägheitsmoment der Kugel bezogen auf eine Axe, welche durch den Schwerpunkt geht und parallel läuft zur Drehaxe, so ist $P = \mathfrak{P} + l^2\,M$, und obige Bedingung lässt sich schreiben: $O = \mathfrak{P} + M\,(a - l)^2$. Dies wird aber nur dann möglich sein, wenn die Dichtigkeit der Kugelmasse allenthalben verschwindend klein ist und nur an der Stelle, wo die $+\,z$ Axe die Kugelfläche durchdringt, ein schwerer Punkt sich befindet.

Wir wollen die Bewegung für diesen exceptionellen Fall vorweg untersuchen. Da $l = a$ und $P = a^2\,M$, geht (12) über in:

$$\frac{dt}{a}\sqrt{\frac{T}{2\,M}} = \cos\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{t}{a}\sqrt{\frac{T}{8\,M}},\quad \vartheta = 2\arcsin\frac{t}{a}\sqrt{\frac{T}{8\,M}}.$$

Indem wir es so einrichten, dass für $t = o$ die $+\,z$ Axe parallel läuft zur $+\,\zeta$ Axe, ist eine Integrationsconstante nicht erforderlich. Für p hat man dann zufolge (11):

$$p\sqrt{\frac{8\,a^2 M}{T} - t^2} = 2.$$

Ein Blick auf unsere Resultate zeigt, dass die Bewegung nur möglich ist für $t \leqq a\sqrt{\frac{8\,M}{T}}$. Sie ist asymptotisch. Nimmt man etwa an, dass T sehr klein ist, so wird die Drehgeschwindigkeit zuerst (für $t = o$) den kleinen Wert $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{T}{2\,M}}$ haben, dann mehr und mehr zunehmen, und schliesslich unendlich gross werden.

Hosted by Google

Die beschriebene macht die Hälfte der Gesamtbewegung aus, gestattet doch die Formel für p einen Zeichenwechsel der Zeitgrösse. Unsere Resultate befriedigen auch die erste Gleichung (10), wie man sich durch mechanisches Einsetzen überzeugen kann. —

Wir wollen uns nunmehr dem allgemeinen Fall zuwenden, also $P + a^2 M \mp 2 a l M$ nehmen, und (12) derart transformieren, dass wir nur mit reellen Grössen zu tun bekommen. Im folgenden wollen wir unter k^2 den Ausdruck verstehen:

$$k^2 = \frac{4 a l M}{P + a^2 M + 2 a l M}.$$

k^2 wird stets kleiner sein als 1, denn die Bedingung, dass der Bruch ein echter ist, lautet: $\mathfrak{P} + M(a - l)^2 > o$, was jetzt immer der Fall ist. Ferner führen wir eine neue Variable x ein, welche mit ϑ folgendermassen verknüpft ist:

13) $$\cos \vartheta = 1 - 2 x^2.$$

Nach alledem wird (12) übergehen in

14) $$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} - \frac{k^2 x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = dt \cdot k \sqrt{\frac{T}{8 a l M}}.$$

Setzt man schliesslich hierin

15) $$x = \sin am\, z,$$

so wird sich vorstehende Gleichung verwandeln in

16) $$dz - k^2 \sin^2 am\, z\, dz = dt \cdot k \sqrt{\frac{T}{8 a l M}}.$$

Diese Gleichung lässt sich integrieren mit Hülfe der speziellen Jacobi'schen Transcendenten Θ (sie findet sich schon in seinen: Fundamenta Nova Theoriae Funct. Ell., Regiomonti 1829, pag. 180), welche dargestellt ist durch die Reihe

17) $$\Theta z = 1 - 2 q \cos \frac{\pi z}{K} + 2 q^4 \cos \frac{2 \pi z}{K} - 2 q^9 \cos \frac{3 \pi z}{K} + - \cdots$$

Dabei bedeutet

$$q = e^{-\pi \cdot \frac{K^1}{K}}.$$

K und K^1 wieder hängen mit den Perioden von sin am z in einfacher Weise zusammen, es ist bekanntlich:

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}, \quad K^1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^{1\,2} x^2)}},$$

Hosted by Google

wobei noch $k^{12} = 1 - k^2$ zu denken ist. Die Integration von (16) ergibt:

$$18) \qquad \left(1 - \frac{\Theta''}{\Theta}\right) z + \frac{\Theta' z}{\Theta z} = t \cdot k \sqrt{\frac{T}{8 a l M}}.$$

Die Integrationsconstante haben wir wieder so gewählt, dass im Anfang der Drehung die $+ z$ Axe dieselbe Richtung hat wie die $+ \zeta$ Axe. Die Combination von (13) und (15) liefert

$$\vartheta = 2 \operatorname{am} z.$$

Da nun z vermöge (18) als Funktion der Zeit gegeben ist, ist ϑ völlig bestimmt, ebenso die Rotationsgeschwindigkeit p, für die wir durch Differenziation von ϑ unter Benutzung von (16) finden:

$$p = \sqrt{\frac{T}{2 a l M}} \cdot \frac{k}{\triangle \operatorname{am} z}.$$

Unsere Bewegung verläuft periodisch. Setzt man in (18) statt z die Grösse 2 K ein, so erhält man für die Dauer einer einmaligen Rotation:

$$t = \frac{4K}{k}\left(1 - \frac{\Theta''}{\Theta}\right) \sqrt{\frac{2 a l M}{T}}.$$

Es erübrigt noch die Frage, ob die gefundenen Ausdrücke für ϑ und p die erste der Differenzialgleichungen (10) auch wirklich befriedigen. Dass dies der Fall ist, davon kann man sich wieder durch Einsetzen überzeugen. —

Ganz analog wird eine Drehung um die dritte Hauptaxe des Mittelpunktes ausfallen.

IV.

Ist die Axe, auf welcher der Schwerpunkt liegt, eine isolierte Trägheitsaxe, somit

$$Q = P$$

so lässt sich die Bewegung in einem besonderen Falle, der noch näher zu beschreiben ist, unschwer verfolgen. Sie ist, um es wenigstens anzudeuten, charakterisiert durch ein trigonometrisches Lösungssystem der Gleichungen (8). Davon soll dieser Abschnitt eingehend handeln.

Für unsern Zweck ist es notwendig, den Gleichungen (8) eine möglichst durchsichtige Gestalt zu verschaffen. Dies gelingt uns, wenn wir die beiden ersten einmal mit p und q, dann mit γ_1 und γ_2 multiplizieren und sie addieren, die dritte unverändert lassen. Gehörig geordnet, wird man dann haben:

Hosted by Google

$$(P + 2\,a\,l\,M\gamma_3 + a^2\,M\,\gamma_3^2)\left(p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt}\right) +$$

$$a^2\,M\left(\gamma_2\frac{dp}{dt} - \gamma_1\frac{dq}{dt}\right)(\gamma_2 p - \gamma_1 q) - a\,M\,(l + a\,\gamma_3)(\gamma_1 p + \gamma_2 q)\frac{dr}{dt} =$$

$$a\,l\,M\,(p^2 + q^2)(\gamma_2 p - \gamma_1 q)$$

19)
$$(P + 2\,a\,l\,M\,\gamma_3 + a^2\,M\,\gamma_3^2)\left(\gamma_1\frac{dp}{dt} + \gamma_2\frac{dq}{dt}\right) -$$

$$a\,M\,(l + a\,\gamma_3)(\gamma_1 + \gamma_2^2)\frac{dr}{dt} = (P - R + a\,l\,M\,\gamma_3)(\gamma_1 q - \gamma_2 p)\,r$$

$$[R + a^2\,M\,(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)]\frac{dr}{dt} - a\,M\,(l + a\,\gamma_3)\left(\gamma_1\frac{dp}{dt} + \gamma_2\frac{dq}{dt}\right)$$

$$= a\,l\,M\,r\,(\gamma_2 p - \gamma_1 q).$$

Man sieht, wie der Ausdruck $\gamma_2 p - \gamma_1 q$ öfters wiederkehrt. Dies legt uns den Gedanken nahe zu untersuchen, wann die Bedingung

20) $$\gamma_2 p - \gamma_1 q = o$$

mit obigen Gleichungen in Einklang steht. Es wird dann und nur dann der Fall sein, wenn gleichzeitig

21) $$\gamma_1\frac{dp}{dt} + \gamma_2\frac{dq}{dt} = o$$

22) $$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} = o$$

$$\frac{dr}{dt} = o$$

gesetzt wird. Indem wir uns der Euler'schen Winkel erinnern, können wir (20) auch in folgender Form nehmen:

$$p = c\cos f,\quad q = c\sin f.$$

c ist ein zunächst unbekannter Proportionalitätsfaktor, allenfalls von der Zeit abhängig. Setzt man die Werte von p und q in (21) ein, so stellt sich bei Berücksichtigung von (2) heraus, dass

$$\frac{dc}{dt} = o$$

sein muss, wenn (20) und (21) zusammen bestehen sollen. c ist also eine wirkliche Constante; sie stellt die in die x y Ebene fallende Componente der Drehgeschwindigkeit dar.

Durch Vergleichung von (20) und (4) erkennt man als eine Eigentümlichkeit dsr Bewegung, dass ϑ einen festen Wert besitzt. Infolgedessen wird der Schwerpunkt, dessen ζ coordinate $= a + l\gamma_3$ ist (cf. 1), immer gleich hoch über der Horizontalebene bleiben.

Hosted by Google

Ehe wir jedoch die Bewegung vollständig beschreiben können, müssen wir vorerst ihre Bestimmungsstücke ermitteln.

Nun müssen wir beachten: die beiden ersten Gleichungen (19) sind infolge der Bedingungen (20) nicht von einander unabhängig, so dass sie die beiden ersten Gleichungen (8) nicht völlig ersetzen. (20) sagt aus, dass p und q direkt proportional sind zu γ_1 und γ_2. Deshalb muss man noch einmal auf die Gleichungen (8), etwa die erste, zurückbeziehen. Setzt man in diese die Ausdrücke für p und q ein, so findet man bei Berücksichtigung von (2):

$$23)\quad \frac{df}{dt} = -\frac{a\,l\,M\,c\sin\vartheta + (P - R + a\,l\,M\cos\vartheta)\,r}{P + a^2 M + 2\,a\,l\,M\cos\vartheta}.$$

Sehen wir jetzt einmal zu, wie sich (20) zu den allgemeinen Gleichungen (4) stellt. Nehmen wir z. B. $\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q$. Nach Einführung der Euler'schen Winkel und des Ausdrucks für q wird die Differenziation ergeben:

$$24)\quad \frac{df}{dt} = c\,\mathrm{ctg}\,\vartheta - r.$$

Eine einwandsfreie Formel für die constante Winkelgeschwindigkeit $\frac{df}{dt}$ bekommen wir erst dann, wenn wir die beiden Resultate mit einander vergleichen. Die rechten Seiten von (23) und (24) liefern uns eine Relation zwischen c, r und ϑ. Nur zwei dieser Grössen können mithin willkürlich genommen werden. Am einfachsten fasst man wohl r und ϑ als gegebene Constanten auf. c richtet sich dann nach ihnen, und zwar hat man:

$$25)\quad c = r\sin\vartheta \cdot \frac{R + a^2 M + a\,l\,M\cos\vartheta}{a\,l\,M + (P + a^2 M)\cos\vartheta + a\,l\,M\cos^2\vartheta}.$$

Der wirkliche Wert von $\frac{df}{dt}$, den wir abkürzend mit s bezeichnen wollen, ist dementsprechend:

$$26)\quad \frac{df}{dt} = -r \cdot \frac{a\,l\,M + (P - R)\cos\vartheta}{a\,l\,M + (P + a^2 M)\cos\vartheta + a\,l\,M\cos^2\vartheta} = s.$$

Dies alles ist eine Folge von (20). Zusammenfassend können wir sagen: Ist im Anfang der Bewegung während eines Zeitdifferenzials $\gamma_2 p - \gamma_1 q = 0$, oder $p = c\cos f$, $q = c\sin f$, d. h. der Winkel ϑ constant, ferner auch r constant, und verlangt man, dass alle

Hosted by Google

folgenden Bewegungszustände derselben Art sind, so darf die Drehcomponente c nicht beliebig constant genommen werden, sondern so wie (25) angiebt.

Noch eine kurze Bemerkung zu (26). Es ist denkbar, dass s durch passende Wahl von ϑ verschwindet. Diesen Fall wollen wir hier ausschliessen, wir werden ihn im folgenden Kapitel in etwas anderem Zusammenhang diskutieren.

Einen einfachen Ausdruck erhält man für φ. Aus (9) folgt unter Benutzung von (2) und der Formeln für p und q:

$$27) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{\sin\vartheta}.$$

φ ist ebenso wie f proportional zur Zeit. Man kann für das folgende etwa annehmen, dass im Anfang der Bewegung beide gleich Null sind.

Mit der Kenntnis der drei Euler'schen Winkel ist unsere Aufgabe im Prinzip gelöst, kann man die Drehung genau beschreiben. Die Drehcomponenten sind:

$$28) \qquad \begin{aligned} p &= c\cos s\,t \\ q &= c\sin s\,t \\ r &= \text{const.} \end{aligned}$$

Da nun der Cosinus desjenigen Winkels, welchen die Momentanaxe in der Kugel mit der z Axe bildet, gleich $\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{r}{\sqrt{c^2+r^2}}$ ist, kann man sagen: Die Momentanaxe beschreibt mit gleichbleibender Geschwindigkeit s einen Kreiskegel um die z Axe. Dabei ist die Rotationsgeschwindigkeit um die Momentanaxe fortdauernd constant $= \sqrt{c^2+r^2}$.

Ein vielleicht anschaulicheres Bild gibt folgende Auffassung: Die Kugel rotiert mit gleichförmiger Geschwindigkeit r um ihre ausgezeichnete Trägheitsaxe. Diese selbst beschreibt mit constanter Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ einen Kreiskegel um eine Axe, welche durch den als ruhend gedachten Mittelpunkt geht und senkrecht steht gegen die $\xi\,\eta$ Ebene. Ob die Drehung um die z Axe in demselben oder entgegengesetzten Sinne vor sich geht wie die Kegeldrehung, hängt davon ab, ob r und $\frac{d\varphi}{dt}$ gleiches oder ungleiches Vorzeichen besitzen.

Hosted by Google

An dieser Stelle wollen wir untersuchen, welcher Art die Curve auf der Kugel ist, die sich auf der festen Ebene abrollt. Für den jeweiligen Berührungspunkt (cf. 1) gilt:

$$29) \qquad \begin{aligned} x &= -a\gamma_1 = -a\sin\vartheta\cos s\,t \\ y &= -a\gamma_2 = -a\sin\vartheta\sin s\,t \\ z &= -a\gamma_3 = -a\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Man sieht, die Punkte erfüllen einen Kreis. Nach der Zeit $\frac{2\pi}{s}$ wird sich selbiger gerade einmal abgerollt haben, d. h. dann, wenn p und q ihre Anfangswerte wieder annehmen (cf. 28).

Nun zur Bewegung des Mittelpunktes. Seine Geschwindigkeitscomponenten bestimmen sich nach unsern Resultaten als

$$30) \qquad \begin{aligned} u &= a\,s\sin\vartheta\sin s\,t \\ v &= -a\,s\sin\vartheta\cos s\,t \\ w &= 0. \end{aligned}$$

Sonach ist die Gesamtgeschwindigkeit constant $= a\,s\sin\vartheta$. Um die Bahn zu ermitteln, greifen wir zurück zu (3), wobei wir $d\vartheta = 0$ setzen. Durch Integration ergibt sich:

$$31) \qquad \begin{aligned} \alpha &= \frac{a\,s}{c}\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ \beta &= \frac{a\,s}{c}\sin^2\vartheta\sin\varphi. \end{aligned}$$

Die Integrationsconstanten haben wir als unwesentlich fortgelassen. Der Mittelpunkt beschreibt einen Kreis vom Radius $\frac{a\,s}{c}\sin^2\vartheta$. Seine Horizontalprojektion ist die Bahn, auf der sich der obenerwähnte feste Kugelkreis abrollt.

Auch der Schwerpunkt durchmisst mit gleichförmiger Geschwindigkeit einen Kreis. Dieser ist bestimmt durch die Coordinaten (cf. 1):

$$32) \qquad \begin{aligned} \xi &= \alpha + l\,\alpha_3 = \left(\frac{a\,s}{c}\sin^2\vartheta + l\sin\vartheta\right)\cos\varphi \\ \eta &= \beta + l\,\beta_3 = \left(\frac{a\,s}{c}\sin^2\vartheta + l\sin\vartheta\right)\sin\varphi \\ \zeta &= a + l\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich durch Differenzieren, Quadrieren und Addieren für die Bahngeschwindigkeit der Ausdruck:

$$a\,s\sin\vartheta + l\,c.$$

Hosted by Google

Es sei noch bemerkt, dass die Radien von Mittel- und Schwerpunktsbahn unabhängig sind von r.

Zum Beschluss dieser allgemeinen Betrachtungen wollen wir auf ein besonderes Characteristicum unserer Bewegung aufmerksam machen. Wir denken uns die momentane Drehgeschwindigkeit zerlegt in die Componenten $\pi\, \varkappa\, \varrho$ nach den Axen des festen Systems. Der Zusammenhang zwischen diesen neuen Vectoren und den alten ist dann folgender:

$$33) \qquad \begin{aligned} \pi &= \alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r = -s \sin\vartheta \cos\varphi \\ \varkappa &= \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r = -s \sin\vartheta \sin\varphi \\ \varrho &= \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r = r \cos\vartheta + c \sin\vartheta. \end{aligned}$$

Wie früher r und $p^2 + q^2$, sind hier ϱ und $\pi^2 + \varkappa^2$ für sich constant. Die Richtungscosini der Drehaxe im Raume sind nun proportional zu $\pi\, \varkappa\, \varrho$. Fragt man, wann die Drehaxe ihre alte Richtung wiedererlangt, so sieht man, geschieht dies nach der Zeit $\frac{2\pi}{c} \sin\vartheta$ (cf. 27), d. i. dann, wenn Mittelpunkt und Schwerpunkt ihre Bahn gerade einmal durchmessen haben (cf. 31, 32). Die Drehaxe wird aber nach dieser Zeit genau in ihre alte Lage zurückgekehrt sein. Alles in allem genommen, es dürfte sich dies auch durch eine rein analytische Betrachtung erhärten lassen, kann man schliessen: Die Momentanaxe beschreibt einen im Raume festen Kreiskegel, und zwar mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$.

Doch lässt sich die Bewegung wohl am einfachsten folgendermassen deuten: Die Kugel rotiert mit gleichbleibender Geschwindigkeit r um die isolierte Trägheitsaxe. Diese wiederum beschreibt mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ einen im Raume festen Kreiskegel, dessen erzeugender Winkel $= \vartheta$ ist.

Die Axen der beiden Kegel sind so wie wir die Integrationsconstanten gewählt haben identisch mit der ζ Axe. —

r und ϑ waren die willkürlichen Parameter der Bewegung. Wir wollen jetzt bei festgehaltenem r ϑ variabel lassen, und zwei Spezialfälle anführen.

Es sei $\vartheta = 90^0$.

Da hier $c = r \cdot \frac{R + a^2 M}{a\, l\, M}$ und $s = -r$, findet man für die Halbmesser der Schwerpunkts- und Mittelpunktsbahn (cf. 32 und 31):

Hosted by Google

$$\frac{R\,l}{R+a^2M} \text{ bez. } \frac{a^2\,l\,M}{R+a^2M}.$$

Der Schwerpunktskreis ist von beiden der kleinere. —

Abgesehen vom trivialen Falle $\vartheta = 0^0$ oder $= 180^0$ gibt es unter Umständen noch einen bestimmten Wert von ϑ, bei dem der Schwerpunkt völlig in Ruhe bleibt. Man findet denselben, indem man etwa den Ausdruck für die Geschwindigkeit des Schwerpunktes $= 0$ setzt. Es liefert dann die Gleichung

$$a\,s\sin\vartheta + l\,c = 0$$

combiniert mit (25) und (26):

$$34) \qquad \cos\vartheta = \frac{l}{a}\cdot\frac{R}{P-R-l^2M}.$$

ϑ wird spitz oder stumpf ausfallen, je nachdem

$$P - l^2M = \mathfrak{P} \gtrless R.$$

Die Bewegung dieserart ist aber nicht bei allen Kugeln möglich, sondern nur dann, wenn die Massenverteilung der Kugel so beschaffen ist, dass die rechte Seite von (34) kleiner wird als 1. Je nachdem nun ϑ spitz oder stumpf resultieren soll, müssen von vornherein folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\mathfrak{P} > \frac{a+l}{a}R \text{ bez. } \mathfrak{P} < \frac{a-l}{a}R.$$

Der Radius der Mittelpunktsbahn wird vermöge (31, 25, 26, 34) einfach $l\sin\vartheta$. Dass dies richtig ist, würde auch unmittelbar aus einer geometrischen Betrachtung folgen.

V.

Wir wollen in diesem Abschnitt nachweisen, dass die allgemeinen Differenzialgleichungen (8) auch das einfache Lösungssystem

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0$$

besitzen und angeben, wie dementsprechend der Anfangszustand der Bewegung beschaffen sein muss. Es müssen die rechten Seiten von (8) zum Verschwinden gebracht werden, also

$$35) \qquad \begin{aligned} &(Q-R+a\,l\,M\gamma_3)\,q\,r + a\,l\,M\gamma_2(p^2+q^2) = 0\\ &(R-P-a\,l\,M\gamma_3)\,r\,p - a\,l\,M\gamma_1(p^2+q^2) = 0\\ &(P-Q)\,p\,q + a\,l\,M\,r(\gamma_2 p - \gamma_1 q) = 0 \end{aligned}$$

Hosted by Google

sein. Multipliziert man diese Bedingungen bez. mit p q r und addiert sie, so hat man

$$(p^2 + q^2 + r^2)(\gamma_2 p - \gamma_1 q) = 0.$$

Wenn überhaupt eine Bewegung stattfinden soll, muss unbedingt

$$\gamma_2 p - \gamma_1 q = 0, \text{ d. h. } \vartheta = \text{const.}$$

genommen werden. Wir sind somit wieder auf unsere alte Formel (20) gekommen, und können wie früher schreiben:

$$p = c \cos f, \quad q = c \sin f.$$

Da nun p und q constant bleiben sollen und $p^2 + q^2 = c^2$ ist, so erkennt man, dass sowohl c wie f für sich constante Grössen sind. Durch Differenziation von $\gamma_2 p - \gamma_1 q = 0$, wobei wir (4) und (2) benutzen, finden wir für c den Wert:

$$c = r \operatorname{tg} \vartheta.$$

Man kann schon eine ganze Reihe von Rückschlüssen auf die Art der Bewegung ziehen. Die Kugel kommt, da f sich nicht ändert, mit nur einem ihrer Punkte mit der $\xi\eta$ Ebene in Berührung, nach (29). Ferner, man sehe etwa (3), wird die Translation gänzlich wegfallen. Die Kugel muss sich notwendigerweise um eine Axe drehen, welche, im Raume fest, senkrecht steht gegen die Horizontalebene, was uns auch (33) bestätigt. Dabei beschreibt der Schwerpunkt einen Kreis von Radius $l \sin \vartheta$, wie unmittelbar aus (32) hervorgeht.

Wir wenden uns jetzt wieder den Bedingungen (35) zu, und scheiden zwischen den Fällen $P = Q$ und $P \neq Q$. Beidemal ist jedoch:

36) $$p = r \operatorname{tg} \vartheta \cos f, \quad q = r \operatorname{tg} \vartheta \sin f.$$

Hat man nun $P = Q$, so ist die dritte der Gleichungen (35) von selbst erfüllt, die beiden anderen sind gleichwertig. Nimmt man etwa die erste und benutzt (36) sowie (2), so ergibt sich aus ihr:

37) $$\cos \vartheta = \frac{a l M}{R - P}.$$

Wir können etwa folgendermassen zusammenfassen: Ist bei einer Kugel $P = Q$, ferner $R - P$ seinem absoluten Betrage nach grösser als a l M, und wählt man im Anfang der Bewegung $c = r \operatorname{tg} \vartheta$, ϑ selbst so wie in (37) angegeben, so wird die Bewegung eine Drehung der Kugel in sich vorstellen. Die Geschwindigkeit der Rotation ist $\frac{r}{\cos \vartheta}$. Zu bemerken ist noch, dass die beschriebene Drehung, wie ja auch geometrisch evident, möglich ist um jede

Hosted by Google

Axe, die mit der z Axe den Winkel ϑ einschliesst. Alle diese Axen ordnen sich auf einem Kreiskegel an, dessen erzeugender Winkel ϑ ist.

Im Falle $P \neq Q$ kann, wie man aus der letzten Gleichung (35) und (36) ersieht, eine Drehung der Kugel in sich nur dann statthaben, wenn entweder p oder q, mit anderen Worten, entweder $\cos f$ oder $\sin f$ gleich Null gewählt wird. Wählen wir etwa $q = 0$, was eintritt für $\sin f = 0$, so finden wir aus der mittleren Gleichung (35), die allein keine Identität wird, wiederum:

$$\cos \vartheta = \frac{a\,l\,M}{R-P}.$$

Die Annahme $p = 0$ oder $\cos f = 0$ würde

$$\cos \vartheta = \frac{a\,l\,M}{R-Q}$$

ergeben. Somit ist in diesem allgemeinen Falle die fragliche Bewegung nur möglich um 4 Axen, von denen 2 in die x z- und 2 in die y z Ebene zu liegen kommen. Die Axen derselben Ebene bilden gleiche Winkel mit der z Axe.

Wenn wir von dem Fall $P \neq Q$ absehen, so ist wohl klar, dass nur ein Spezialfall der im vorigen Abschnitt behandelten Bewegung vorliegt. Denn (26) steht in enger Beziehung zu (37); aus (26) erhält man nämlich infolge (37): $\frac{df}{dt} = s = 0$. An (29) anknüpfend, können wir sagen: Die Periode $\frac{2\pi}{s}$, d. h. die Zeit, welche ein einmaliges Sichabrollen des festen Kugelkreises beansprucht, wird unendlich gross. Auch lässt sich die Kegelbewegung sowohl der Momentanaxe wie auch der z Axe leicht übersehen. Der Momentanaxenkegel artet aus in eine Gerade, der z Axenkegel hat seine Spitze im Mittelpunkt.

VI.

Herr Stübler hat aus seinen Differenzialgleichungen direkt 2 allgemeine Integrale ableiten können, zu denen er noch das der lebendigen Kraft stellt (Stübler, pag. 8). In unserer Abhandlung dürfte nur der Ausdruck für T ein solches repräsentieren. Es existiert aber, wie nachfolgend gezeigt werden soll, ein verhältnismässig einfaches Analogon zu dem ersten Stübler'schen Integrale,

Hosted by Google

welches uns, um dies gleich hier hervorzuheben, in Stand setzt, die allgemeine Bewegung wenigstens ein Stück weit analytisch zu verfolgen.

Wir erinnern uns, dass wir setzten:

$$38) \qquad \varrho = \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r, \quad \frac{d\varrho}{dt} = \gamma_1 \frac{dp}{dt} + \gamma_2 \frac{dq}{dt} + \gamma_3 \frac{dr}{dt}.$$

Ferner merken wir an die allgemein gültige Relation:

$$39) \qquad P p \frac{d\gamma_1}{dt} + Q q \frac{d\gamma_2}{dt} + R r \frac{d\gamma_3}{dt} + (Q - R)\gamma_1 q r + (R - P)\gamma_2 r p + (P - Q)\gamma_3 p q = 0,$$

die sich unschwer aus (4) herleiten lässt.

Multipliciert man nun die Differenzialgleichungen (8), deren linke Seiten in der Form (8ª) geschrieben sein mögen, bez. mit $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ und addiert sie, so findet man bei Berücksichtigung von (38) und (39):

$$40) \qquad \frac{d}{dt}(P p \gamma_1 + Q q \gamma_2 + R r \gamma_3) + a l M \gamma_3 \frac{d\varrho}{dt} = a l M \frac{dr}{dt}.$$

Für $l = 0$ resultiert daraus das erste Stübler'sche Integral. Ein Analogon zu seinem zweiten würde sich aus (8) durch Multiplication mit P p Q q R r ergeben; das complicierte Resultat lassen wir als für das folgende belanglos weg.

Nunmehr wollen wir wieder $Q = P$ nehmen. Alsdann werden wir zu der wesentlichen Erkenntnis gelangen, dass r, ϱ, $p^2 + q^2$, $\frac{d\varphi}{dt}$ und $\frac{d\gamma_3}{dt}$ algebraisch aufgebaut sind in $\gamma_3 = \cos \vartheta$.

Bevor wir dies beweisen, constatieren wir, dass wir (5) und (7) infolge (38) auch schreiben können:

$$41) \qquad \begin{gathered} u^2 + v^2 + w^3 = a^2(p^2 + q^2 + r^2 - \varrho^2), \\ 2T = a^2 M (p^2+q^2+r^2-\varrho^2) + P(p^2+q^2) + R r^2 + \\ 2 a l M \gamma_3 (p^2+q^2+r^2) - 2 a l M r \varrho. \end{gathered}$$

Es ist nun nicht schwer, die Componente r als Funktion von γ_3 zu berechnen. Man kann (40), indem man die Differenziation wieder ausführt und (38) benutzt, umschreiben in:

$$42) \qquad d\varrho = \frac{a l M + (P - R)\gamma_3}{P + a l M \gamma_3} \cdot dr + \frac{P - R}{P + a l M \gamma_3} \cdot r\, d\gamma_3.$$

Setzt man diesen Wert von $d\varrho$ in die letzte der Gleichungen (8) ein und ersetzt auf der rechten Seite $\gamma_1 q - \gamma_2 p$ durch $\frac{d\gamma_3}{dt}$, so ist

Hosted by Google

das Ergebnis eine Differenzialgleichung zwischen r und γ_3, welche lautet:

$$[(R+a^2M)P-a^2l^2M^2+2alMR\gamma_3+a^2M(R-\mathfrak{P})\gamma_3^2]\,dr+ r\,d\gamma_3\,[alMR+a^2M(R-\mathfrak{P})\gamma_3]=0.$$

Da die Variablen getrennt werden können, ergibt sich durch blosse Quadratur:

$$r^2[(R+a^2M)P-a^2l^2M^2+2alMR\gamma_3+a^2M(R-\mathfrak{P})\gamma_3^2]=\text{const.},$$

wofür wir abkürzend schreiben wollen:

43) $$r\sqrt{A+2B\cos\vartheta+C\cos^2\vartheta}=r_0\sqrt{A+2B\cos\vartheta_0+C\cos^2\vartheta_0},\text{ oder}$$
$$r\sqrt{F}=r_0\sqrt{F_0}.$$

Die Bedeutung von A B C und F ist ohne weiteres ersichtlich, r_0 und ϑ_0 bezeichnen bestimmte Anfangswerte.

Auch für ϱ lässt sich eine ganz allgemeine Formel aufstellen, zu der aber einige umständliche Rechnungen erforderlich sind. Da wir jetzt r kennen, wird sich (42) verwandeln in:

$$d\varrho=\frac{r_0\sqrt{F_0}}{(P+alM\gamma_3)\sqrt{F}}\left\{P-R-\frac{[alM+(P-R)\gamma_3][alMR+a^2M(R-\mathfrak{P})\gamma_3]}{F}\right\}$$

Bringt man innerhalb der grossen Klammer auf gleichen Nenner und ordnet, so wird sich herausstellen, dass der Zähler ein Produkt wird, dessen einer Factor $P+alM\gamma_3$ ist, so dass man letzteren gegen die gleiche Grösse im Nenner des vorderen Bruches wegheben kann; es bleibt:

$$d\varrho=r_0\sqrt{F_0}\,[(P-R)(R+a^2M)-a^2l^2M^2]\cdot\frac{d\gamma_3}{F\sqrt{F}}.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, setze man

$$F\equiv A+2B\gamma_3+C\gamma_3^2=y^2,$$

dann wird man erhalten:

$$\varrho+\text{const.}=-r_0\sqrt{F_0}\cdot\frac{(P-R)(R+a^2M)-a^2l^2M^2}{B^2-AC}\cdot\frac{\sqrt{B^2-AC+Cy^2}}{y},$$

und schliesslich nach einigen Umrechnungen:

44) $$a\mathfrak{P}(\varrho-\varrho_0)=lR(r_0-r)+a(R-\mathfrak{P})(r_0\cos\vartheta_0-r\cos\vartheta).$$

Anmerkung: Durch Differenziation von ϱ muss man wieder auf die Gleichung (42) kommen; es ergibt sich aber scheinbar ein ganz anderes Resultat. Dies erklärt sich durch die besondere Form von r.

Die Kenntnis der zwei Componenten r und ϱ ermöglicht es uns, auch $\frac{d\varphi}{dt}$ in γ_3 auszudrücken. Man findet aus (9) ohne weiteres:

Hosted by Google

45) $$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varrho - r\,\gamma_3}{1-\gamma_3^2}.$$

Nun wollen wir wenigstens noch andeuten, wie p^2+q^2 und schliesslich $\frac{d\gamma_3}{dt}$ gefunden werden. Aus (41) folgern wir, dass ganz allgemein gilt:

46) $$p^2+q^2 = \frac{2\,T + a^2M(\varrho^2-r^2) - R\,r^2 - 2\,a\,l\,M\,r^2\gamma_3 + 2\,a\,l\,M\,r\,\varrho}{P + a^2\,M + 2\,a\,l\,M\,\gamma_3}.$$

r und ϱ waren in γ_3 algebraisch aufgebaut, mithin ist auch p^2+q^2 eine algebraische Funktion von γ_3. Was ihre Form anlangt, so dürfte sich herausstellen, dass sie geschrieben werden kann wie folgt:

46 a) $$p^2+q^2 = \frac{a_0 + a_1\gamma_3 + a_2\gamma_3^2 + (b_0+b_1\gamma_3)\sqrt{F}}{(c_0+c_1\gamma_3)\,F}.$$

Die mit Indices behafteten a b c stellen gewisse Constanten vor, die aus den Daten der Kugel sowie den Anfangswerten von r ϱ und γ_3 in complicierter Weise sich zusammensetzen. Hinsichtlich der Bedeutung von F vergleiche man (43).

Um eine Beziehung zwischen γ_3 und der Zeit herzustellen, multipliciere man die letzte der Relationen (4) mit sich selber. Wegen (38) wird man dann haben:

47) $$\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = (p^2+q^2)\,(1-\gamma_3^2) - (\varrho - r\,\gamma_3)^2.$$

Die rechte Seite ist, wie nach dem gefundenen klar, ebenfalls eine algebraische Funktion von γ_3, und ähnlich gebaut wie (46 a). Der Nenner wird derselbe; im Zähler geht voran eine ganze rationale Function von γ_3, und zwar vom 4. Grade, dann folgt $\sqrt{F}$ multipliciert mit einer ebensolchen vom 3. Grade.

Zu einfachen elliptischen Integralen wird man nur in ganz besonderen Fällen gelangen.

VII.

Wir wollen diese allgemeinen Betrachtungen hier abbrechen und uns mit einigen Spezialfällen, die einer weiteren Behandlung zugängig sind, befassen. Wir untersuchen

1.

Die Bewegung einer Kugel, bei der nur die z Axe schwer, also $R=0$ ist. Den extremen Fall $l=a$, $\mathfrak{P}=0$ ausschliessend, findet man (cf. 43, 44):

Hosted by Google

$$r \sin \vartheta = r_0 \sin \vartheta_0, \quad \varrho - \varrho_0 = r \cos \vartheta - r_0 \cos \vartheta_0.$$

Zugleich lassen wir eine weitere Einschränkung eintreten, indem wir annehmen, dass $\varrho_0 = r_0 \cos \vartheta_0$ ist. Die Horizontalprojection der schweren Axe soll also mit der ξ Axe immer den gleichen Winkel einschliessen (nach 45); ohne der Allgemeinheit der folgenden Entwicklungen Eintrag zu tun, wollen wir $\varphi = 0$ nehmen.

Für $p^2 + q^2$ und $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ ergibt sich (cf. 46 und 47) der gemeinsame Wert:

$$p^2 + q^2 = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2T - a^2 M r_0^2 \sin^2 \vartheta_0}{P + a^2 M + 2 a l M \cos \vartheta}.$$

Die Integration der vorliegenden Differenzialgleichung haben wir schon im III. Abschnitt gegeben, als wir die Rotation um die x Axe betrachteten; nur stand dort statt $2T - a^2 M r_0^2 \sin^2 \vartheta_0$ einfach $2T$.

Um f zu finden, greifen wir zurück zu (4). Combiniert man die bisherigen Ergebnisse mit den Formeln für $\frac{d\beta_1}{dt}$ und $\frac{d\beta_2}{dt}$, so folgt:

$$\frac{df}{dt} = -r, \quad df = -r_0 \sin \vartheta_0 \cdot \frac{dt}{\sin \vartheta}.$$

f selbst wird demnach dargestellt durch ein Integral über eine elliptische Function, das man etwa in Thetafunctionen ausdrücken kann.

Die Bewegung des Mittelpunktes bestimmt sich nach den Bedingungen (3). Wir erhalten hier:

$$d\alpha = a\, d\vartheta$$
$$d\beta = a \sin \vartheta\, df = -a r_0 \sin \vartheta_0\, dt.$$

Da $d\alpha$ periodisch ausfällt, wird die Bahn des Centrums eine Art Sinuslinie sein.

Die allgemeinen Relationen (4) liefern uns übrigens auch die fertigen Ausdrücke für die Componenten p und q; man findet nämlich:

$$p = \frac{d\vartheta}{dt} \sin f, \quad q = -\frac{d\vartheta}{dt} \cos f.$$

Hinzufügen wollen wir noch, dass für $r_0 = 0$ die Bewegung übergeht in eine einfache Rotation um eine in der x y Ebene liegende und zur Horizontalebene parallele Axe, verbunden mit einem gradlinigen Fortschreiten des Mittelpunktes. —

Hosted by Google

Über rollende Bewegung hat während der letzten Jahre ausser Stübler u. a. auch Prof. Dr. Ernst Lindelöf gearbeitet (Sur le mouvement d'un corps de révolution roulant sur un plan horizontal, in: Acta Soc. Scient. Fennicae, Tom. XX, Helsingf. 1895). Er untersucht das Rollen eines convexen Umdrehungskörpers unter dem Einfluss der Schwerkraft. Die Umdrehungsaxe stellt gleichzeitig eine isolierte Trägheitsaxe vor.

Seine allgemeinen Resultate sind nicht ganz correct. Er begeht denselben Fehler wie Crescini und Padova (Rendi conti 1888 pag. 507 und 1889 pag. 204), indem er in die Formel für die lebendige Kraft von vornherein die Beziehung aufnimmt, welche beim reinen Rollen zwischen der Drehungs- und Verschiebungsgeschwindigkeit besteht.

Überdies können wir an einem speziellen Beispiel direct nachweisen, dass seine Formeln anders ausfallen als unsere. Wir behandelten in diesem Abschnitt den Fall R=0. Dazu sei noch l=0. Dann wird sich für ϑ folgende Differenzialgleichung herausrechnen lassen:

$$(P + a^2 M) \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = (2T - \lambda^2 P - a^2 M r_0^2 \sin^2 \vartheta_0) -$$

$$(2T + a^2 \lambda^2 M - a^2 M r_0^2 \sin^2 \vartheta_0) \cos^2 \vartheta + a^2 \lambda M r_0 \sin \vartheta_0 \cdot \sin 2\vartheta.$$

Hierin bedeutet $\lambda = \varrho_0 - r_0 \cos \vartheta_0$. (Wir hatten im besondern $\lambda = 0$ gewählt.)

Denken wir uns nun den Lindelöf'schen Umdrehungskörper als ebensolche Kugel. Es ist da zu setzen: $A = 0$, $r = a$. Wir wollen noch die Lindelöf'sche Bezeichnungsweise durch unsere ablösen und $B = P$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ setzen. Alsdann wird sich folgende Differenzialgleichung ergeben:

$$(P + a^2 M) \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2T - (a^2 M C_1^2 + P C_2^2) - 2T \cos^2 \vartheta.$$

C_1 und C_2 stellen gewisse Constanten vor. Man sieht, auf der rechten Seite fehlt das Glied mit $\sin 2\vartheta$. Aber auch wenn wir wieder $\lambda = 0$ nehmen, was bei Lindelöf $C_2 = 0$ entspricht, zeigen beide Gleichungen noch ein verschiedenes Aussehen. Unsere besagt, dass ϑ proportional mit der Zeit wächst, die von Lindelöf führt auf eine trigonometrische Lösung.

2.

Es sei $\mathfrak{P} = R$, d. h. das Zentralträgheitsellipsoid eine Kugel. Wir wollen zeigen, dass auch bei dieser Annahme die allgemeine Betrachtung sich etwas vereinfacht. Für r und ϱ findet man:

Hosted by Google

$$r\sqrt{R+M(a^2+l^2+2\,a\,l\cos\vartheta)}=\text{const.},\quad a(\varrho-\varrho_0)=l(r_0-r).$$

Die Formel für ϱ wollen wir kurzweg $a\,\varrho=\lambda-l\,r$ schreiben, wobei $\lambda=a\,\varrho_0+l\,r_0$ ist. $\cos\vartheta$ tritt unter dem Wurzelzeichen nur linear auf, dazu in einer Constellation, welche die Einführung einer neuen Variablen nahelegt. Wir werden $a^2+l^2+2\,a\,l\cos\vartheta=x^2$ setzen. x hat eine einfache geometrische Bedeutung, es repräsentiert die Entfernung zwischen Schwerpunkt und Berührungspunkt.

Für p^2+q^2 hat man nach dem bisherigen:

$$p^2+q^2=\frac{2\,T+\lambda^2 M-r_0^2(R+M\,x_0^2)}{R+M\,x^2}.$$

Wie man sofort überschaut, wird dann:

$$\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=r_0\sqrt{\frac{R+M\,x_0^2}{2\,T+\lambda^2 M}}=\text{const.}$$

Dies wichtige Resultat besagt, dass die Momentanaxe einen Kreiskegel um die z Axe beschreibt.

(47) liefert uns für $\mathfrak{P}=R$ ein verhältnismässig einfaches Resultat. Es wird, immer noch x als neue Veränderliche aufgefasst, sein:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{a_0+a_1x^2+a_2x^4+(b_0+b_1x^2)\sqrt{R+Mx^2}}{x^2(R+Mx^2)}.$$

Die a und b stellen wieder gewisse Constanten vor. Ersetzt man $R+Mx^2$ etwa durch y^2, so folgt:

$$dt=\frac{y^2\,dy}{\sqrt{c_0+c_1y+c_2y^2+c_3y^3+c_4y^4}}.$$

Man wird also, es ist dies ein immerhin interessantes Ergebnis, auf elliptische Integrale geführt.

3.

r war in γ_3 algebraisch aufgebaut (cf. 43). Es gibt aber einen gewissen Fall, in dem r eine rationale Function von γ_3 wird. Er tritt ein, wenn unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat steht, d. h. $B^2=AC$ ist. A und B sind nun Grössen, die immer positiv ausfallen; folglich muss auch C positiv, oder was dasselbe ist, $R>\mathfrak{P}$ sein. Weiter, die Bedingung $B^2=AC$ ist nichts anderes als eine Relation zwischen den gegebenen Stücken der Kugel, die man wie folgt fixieren kann:

$$P=R+\frac{a^2l^2M^2}{R+a^2M}.$$

Hosted by Google

Für die Componenten r und ϱ ergeben sich alsdann einfache Werte, nämlich:

$$r = r_0 \cdot \frac{R + a^2 M + a\,l\,M \cos\vartheta_0}{R + a^2 M + a\,l\,M \cos\vartheta}, \quad \varrho = \varrho_0.$$

Selbstverständlich wird auch p^2+q^2 in γ_3 rational. Die auftretenden Constanten nur andeutend, finden wir:

$$p^2+q^2 = \frac{a_0 + a_1\gamma_3 + a_2\gamma_3^2}{(b_0+b_1\gamma_3)(R+a^2M+a\,l\,M\gamma_3)^2},$$

und dann:

$$\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = \frac{c_0 + c_1\gamma_3 + c_2\gamma_3^2 + c_3\gamma_3^3 + c_4\gamma_3^4}{(b_0+b_1\gamma_3)(R+a^2M+a\,l\,M\gamma_3)^2}.$$

Diese Formel ist wesentlich einfacher als die allgemeine Formel (47) nach ihrer Entwicklung. γ_3 wird hier durch Behandlung hyperelliptischer Integrale gefunden.

4.

Ein letztes Beispiel soll der Fall P=Q=R bilden. Es fragt sich aber noch, ob man die Masse wirklich so anordnen kann, dass die Trägheitsmomente, bezogen auf den Mittelpunkt, einander gleich werden, der Schwerpunkt aber ausserhalb des Centrums zu liegen kommt. Wir wollen die Existenz einer solchen Kugel nachweisen.

Man denke sich zunächst eine homogene Hohlkugel von der Masse M_0. Diese wird für jede durch den Mittelpunkt gehende Axe ein gleiches Trägheitsmoment besitzen, es sei P_0. Der Radius der inneren Sphäre möge $e < \frac{a}{\sqrt{2}}$ sein. In den Punkten, wo die Zweige der x und y Axe letztere durchdringen, denke man sich 4 gleiche Massenpunkte m angebracht. Ein ebensolcher sei auf der z Axe verschieblich. Man kann dann dessen Entfernung ε vom Mittelpunkt so wählen, dass tatsächlich P=Q=R wird. Zu diesem Zweck braucht man nur zu setzen:

$$P_0 + 2\,m\,e^2 + m\,\varepsilon^2 = P_0 + 4\,m\,e^2$$

$$\varepsilon = e\sqrt{2}.$$

ε muss gleich der Seite des durch die 4 discreten Massenpunkte gebildeten Quadrats genommen werden. Nebenbei ergibt sich für die Schwerpunktscoordinate:

$$l = \frac{m\,\varepsilon}{M_0 + 5\,m}.$$

Hosted by Google

Vita.

Am 4. September 1877 wurde ich, Christian Louis Friedrich Georg Willing, lutherischer Konfession, als ältester Sohn des Katasterbeamten Rudolph Willing, zu Saalfeld im Herzogtum Meiningen geboren. Im Jahre 1883 siedelten meine Eltern nach Meiningen über, wo ich von Ostern 1884 bis Ostern 1888 in der städtischen Bürgerschule Elementarunterricht empfing. Dann besuchte ich das Herzogliche Realgymnasium ebendaselbst, und legte Ostern 1897 meine Reifeprüfung ab. Unmittelbar darauf bezog ich die Universität Leipzig, um Mathematik und Physik zu studieren.

Ich hörte Vorlesungen bei den Herren Professoren und Dozenten: Boltzmann, Bruns, Dalman, Drude, Engel, Fricke, Gregory, Hasse, Hassert, Hauck, Hausdorff, Heinze, Hölder, Hofmann, Lange, Lie †, Liebmann, Mayer, Neumann, von Oettingen, Ratzel, Richter †, Richter, Rieker, Strümpell †, Volkelt, Wiedemann †, Wiener, Wundt, und nahm teil an den Seminarübungen der Herren Professoren und Dozenten: Engel, Hölder, Liebmann, Volkelt, sowie am physikalischen Praktikum der Herren Professoren Wiener und Wiedeburg †.

Seit Juni 1901 erteile ich am Leipziger Missionsseminar Unterricht in Mathematik und Physik.

Allen meinen verehrten Lehrern spreche ich meinen Dank aus, besonders Herrn Professor Dr. Hölder, der mir die Anregung zur vorliegenden Arbeit gab und sie mit freundlicher Teilnahme begleitete.

Hosted by Google